ωの高さをもつclosed 1-complex(低次元多様体の幾何構造と位相構造)

小林, 一章

数理解析研究所講究録
542巻 1985年 144-157

ωの高さをもつ closed 1-complex

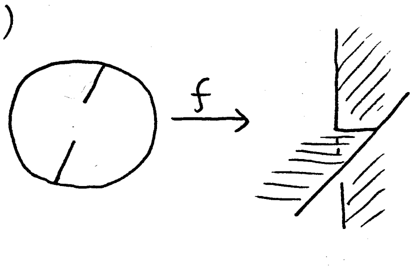
東女大　小林一章（Kazuaki Kobayashi）

ハンドル体の中のωの高さをもつ closed 1-complex の性質を記述します.

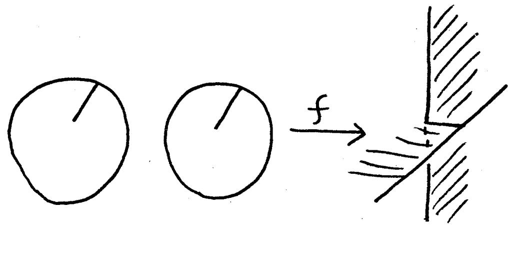
Kをコンパクト, 向きづけ可能な3次元多様体M^3の中の closed 1-complex とする。 KがM^3で <u>0-contractible</u> とは次の性質をもつ 2-complex Lと PL-map $f: L \to M^3$ が存在する事である。即ち ① Lの1-骨格$L^{(1)}$の部分複体$\tilde{K}$でKと単体的に同型となるものがある。 ② $|L-\tilde{K}|$は開2-球体の非交和 ③ Lは1点にカラプシブル ; $f(\tilde{K})=K$ かつ $f|\tilde{K}$ は埋め込みになっている。 更にfの特異点集合 $\{x \in L \mid \# f^{-1}f(x) \geq 2\}$ は次の3つのタイプのものから成るとしておく([5]参照)

I. Clasp singularities

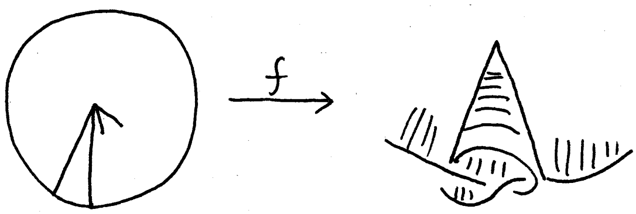
(a)



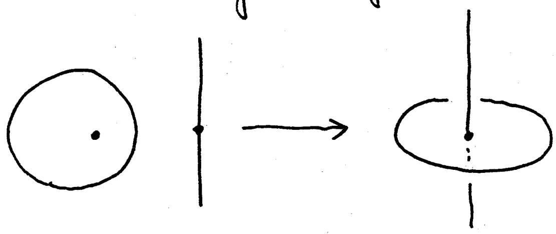
(b)



II. Branch point singularity



III Isolated singularity



Vを種数，$g(V)$，がnのハンドル体とする。$D_1^2, \cdots, D_n^2$をVにプロパーに埋め込まれた2-球体としたとき$\{D_1^2, \cdots, D_n^2\}$がVの meridian ball system とは $Cl(V - \bigcup_{i=1}^{n} U(D_i^2))$ が1つの3-球体となる時を言う. meridian ball system に含まれる2-球体を meridian ball という。

Kをハンドル体Vに含まれている closed 1-complex とする. KがVで geometrically essential とはVの任意の meridian ball がKと交わる時をいう。

Kを向きづけ可能なコンパクト多様体M^3の中の closed 1-complex とし，VはKを含んでいるハンドル体とする。Vのスパインを$sp(V)$とかく（ただし$sp(V)$は常に closed 1-complex とし特にVが3-球体の時は$sp(V)$は1点とする。）次の①，②，③の条件をみたすとき $sp(V) < K$ とかく。

2.

① K は V のどんなスパインにもならない ② K は V で geometrically essential ③ V は K を含むハンドル体で①，②をみたすもののうち種数が最小．

注．定義より K が 1 点なら $sp(V) < K$ となるハンドル体 V はない．

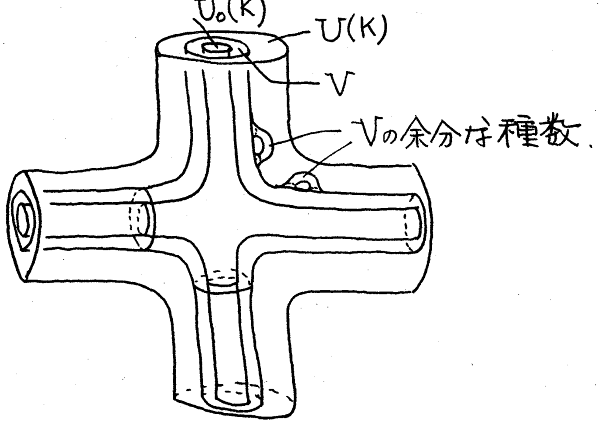
Lemma 1. K を向きづけ可能なコンパクト多様体 M^3 内の closed 1-complex とする。V が K を含む M^3 内のハンドル体で，$sp(V) < K$ なら $K \subset V \subset U(K)$ となる K の正則近傍 $U(K)$ は存在しない。

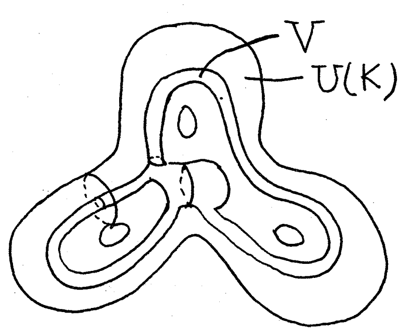
証). もし結論のような $U(K)$ が存在すると $K \subset U_0(K) \subset V \subset U(K)$ となるようなハンドル体の列が存在する。今 $\hat{K} = sp(V)$ とおくと $\hat{K} < K$ だから K は $V = U(\hat{K})$ で geometrically essential

もし $U(K)$ の meridian ball D^2 で $D^2 \cap V = \hat{D}_1^2 \cup \cdots \cup \hat{D}_p^2$ $(p \geqq 2)$ ($\hat{D}_i^2$ は V の meridian balls) とすると K は V で geom. essential だから $D^2 \cap U_0(K) = \hat{\hat{D}}_1^2 \cup \cdots \cup \hat{\hat{D}}_q^2$ $(q \geqq p)$ ($\hat{\hat{D}}_i^2$ は $U_0(K)$ の meridian balls) これは D^2 が $U(K)$ の meridian ball で

$U(K) - \mathring{U}_0(K) \cong \partial U(K) \times I$ に矛盾．従って $\{D_1^2, \cdots, D_n^2\}$ を $U(K)$ の meridian ball system とすると全ての i について $D_i^2 \cap sp(V) = 1$ 点 となる。そこで $U_0(K) \subset V \subset U(K)$ の位置関係は次頁の左図のようになり V に余分な genus があると K は V で geometrically essential でなくなる。また右図のように

$g(V) < g(U(K))$ となるとK$\not\subset$Vとなり，いずれも矛盾.





∴ $\partial U_0(K) /\!/ \partial V /\!/ \partial U(K)$ となり $K = sp(V)$ in $U(K)$ となる。これは $sp(V) = \tilde{K} < K$ の条件①に矛盾. 故に $K \subset V \subset U(K)$ となる正則近傍U(K) は存在しない。」

定義. Vを3次元多様体M^3内のハンドル体でKをVに含まれるclosed 1-complex とする。 $sp(V) < K$ のとき $K_{n-1} = sp(V)$ とかく。K_{n-1}を含むハンドル体V_{n-1}で $sp(V_{n-1}) < K_{n-1}$ のとき $K_{n-2} = sp(V_{n-1})$ とかく. 以下同様に順次K_iを作りK_iを含むハンドル体V_iで $sp(V_i) < K_i$ のとき $K_{i-1} = sp(V_i)$ とおく. このようにして $K \equiv K_n$ から $K_{n-1}, \cdots, K_1, K_0$ を作ったとき

$K_0 < K_1 < \cdots < K_{n-1} < K_n = K$ とかく. 従って $K_0 < \cdots < K_n = K$ とかいたとき，あらかじめ$(n+1)$個のclosed 1-complexes, $K_0, K_1, \cdots, K_n$ が与えられているのではない。Kのみが与えられていて $K_{n-1}, \cdots, K_1, K_0$ は $K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$ となるように上の方法で作ったものとする。

Corollary 1. $K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$ という列があると

$U(K_0) \supset U(K_1) \supset \cdots \supset U(K_{n-1}) \supset U(K_n)$ をみたす正則近傍の列があり，それらについて $g(U(K_0)) \geqq g(U(K_1)) \geqq \cdots \geqq g(U(K_{n-1}))$ が成り立つ。

証）前半の正則近傍の列の存在は $K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$ の定義より明らか．次に K_n は $U(K_{n-2})$ の中で geometrically essential である。何故なら K_{n-1} は $U(K_{n-2})$ の中で geometrically essential だから $U(K_{n-2})$ の任意の meridian ball D^2 に対し $D^2 \cap U(K_{n-1}) = \tilde{D}_1^2 \cup \cdots \cup \tilde{D}_p^2$ $(p \geqq 1)$ （$\tilde{D}_i^2$ は $U(K_{n-1})$ の meridian ball）．また K_n は $U(K_{n-1})$ の中で geom. essential だから $K_n \cap \tilde{D}_i^2 \neq \phi$ for $1 \leqq {}^\forall i \leqq p$. $\therefore D^2 \cap K_n = \phi$ // 次にもし $K_n = sp(U(K_{n-2}))$ in $U(K_{n-2})$ なら $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset U(K_{n-2})$ で $U(K_{n-2})$ は K_n のある正則近傍になっている。即ち $U(K_{n-2}) = \tilde{U}(K_n)$ $\therefore K_n \subset U(K_{n-1}) \subset \tilde{U}(K_n)$ これは Lemma 1 に矛盾．$\therefore K_n \neq sp(U(K_{n-2}))$．以上より K_{n-2} は $K_{n-2} < K_n$ となるための条件①，② を満足している。そこでもし $g(U(K_{n-2})) < g(U(K_{n-1}))$ となると K_{n-1} は $K_{n-1} < K_n$ となるための③の条件を満足していない事になり矛盾．

$\therefore g(U(K_{n-2})) \geqq g(U(K_{n-1}))$．　以下同様．┘

注）$g(U(K_n))$ の最小性はないので $g(U(K_n)) > g(U(K_{n-1}))$ という事はあり得る。

<u>Corollary 2.</u> M^3 内で $K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$ で $U(K_0) \supset U(K_1) \supset \cdots \supset U(K_n)$ としたとき $0 \leqq k < j \leqq n$ なる任意の k, j に対し $\partial U(K_k) \not\parallel \partial U(K_j)$

証). $j=k+1$ のときは $K_k < K_{k+1}$ の条件①より $\partial U(K_k) \not\parallel \partial U(K_{k+1})$.
$j \geqq k+2$ のとき $\partial U(K_k) \parallel \partial U(K_j)$ とすると $U(K_k) - \mathring{U}(K_j) \cong \partial U(K_k) \times I$ 即ち $U(K_k) = \hat{U}(K_j)$ 故に $K_j \subset U(K_{j-1}) \subset U(K_k) = \hat{U}(K_j)$
これは Lemma 1 に矛盾. $\therefore \partial U(K_k) \not\parallel \partial U(K_j)$ ┘

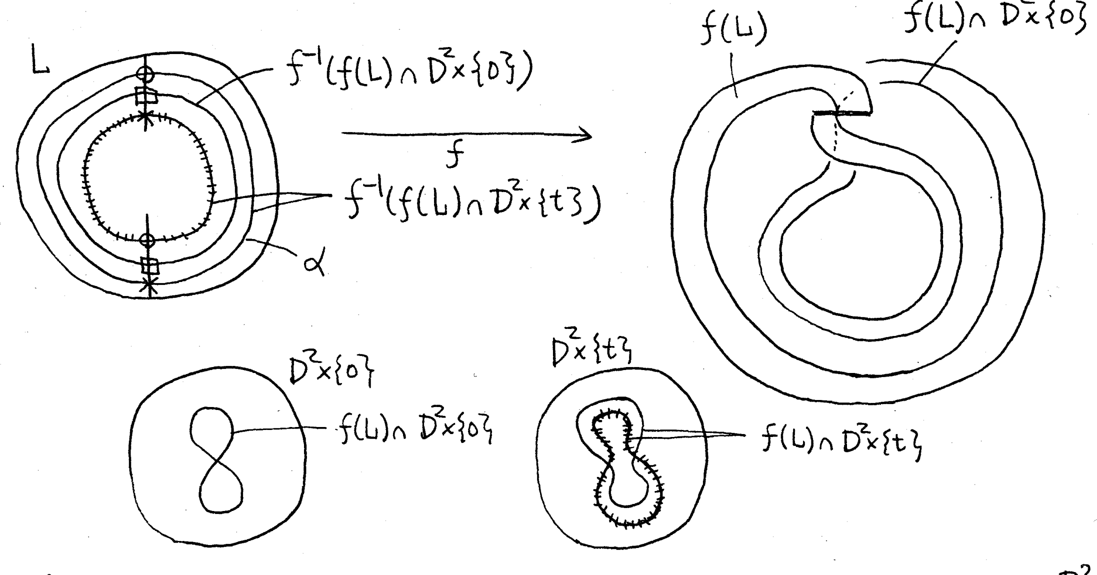
3次元多様体 M^3 に含まれる closed 1-complex K に対し
$K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$ という列が存在し

$\max\{n \mid n$ は上のような列の長さ$\} = m$ のとき K は M^3 で <u>m の高さ</u>をもつという。任意の自然数 m に対し K が M^3 で m の長さの列をもつとき, K は M^3 で <u>∞ の高さ</u>をもつという。
K から長さ有限の列 $\hat{K} = K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$ で到達する任意の $\hat{K}$ が ∞ の高さをもつとき K は M^3 で <u>ω の高さ</u>をもつという。

<u>Lemma 2</u> M^3 内に含まれる closed 1-complex K が M^3 で 0-contractible なら K を含む M^3 内のハンドル体 V で, K がその中で geom. essential かつ $K \neq sp(V)$ となるものがある。

証). K が 0-contractible だから,その定義より 2-complex L と PL-写像 $f: L \longrightarrow M^3$ が存在する。f の特異点集合は clasp singularity, branch point singularity, isolated singularity の3つの型であると仮定して良い。従って $f(L)$ は closed 1-complex をスパインにもち, よって $U(f(L))$ はハンドル体である。そこで K が $U(f(L))$ で geom. essential なら $f_1 = f$ とおく. K が

$U(f(L))$ で geom. inessential なら $U(f(L))$ の meridian 2-ball D^2 で $D^2\cap K=\phi$ となるものがある。従って D^2 と f の isolated singularity の像は交わらない。また branch point singularity の1つの成分 C の像 $f(C)$ の正則近傍は3-球体だから M^3 の ambient isotopy で $f(C)\cap D^2=\phi$ と出来る。そこで以下 clasp singularity のみを考える。$f(L^{(0)})\cap D^2=\phi$ としてよい。従って $f^{-1}(f(L)\cap D^2)$ の各成分は単純閉曲線。更に meridian ball D^2 の collar を $D^2\times[-1,1]$ とし α を $f^{-1}(f(L)\cap D^2\times\{t\})$ の1つの成分(=単純閉曲線)としたとき $f|\alpha=$ embedding となる $t\in[-1,1]$ が存在する。



$|L-\tilde{K}|$ は開2-球体の非交和だから1つの開2-球体 D_0^2 上で $f^{-1}(f(L)\cap D^2\times\{t\})$ の outermost component α を取るとそれは D_0^2 上で 2-ball D_α^2 を張っている。また $f|\alpha$ は埋め込みだから $f(\alpha)$ は $D^2\times\{t\}$ 上で2-球体 $\tilde{D}_\alpha^2$ を張っている。そこで写像 f を $\tilde{f}(D_\alpha^2)=\tilde{D}_\alpha^2$ となるように変える。これによって $\tilde{f}(D_0^2)\cap D^2\times\{t\}$

$=\phi$ となる。このように f を $\tilde{f}_1$ に変えて $\tilde{f}_1(L)\cap D^2\times\{t\}=\phi$ と出来る。そして $\tilde{f}_1$ の特異点集合の型を再び piping technique を使ってⅠ，Ⅱ，Ⅲのみにする。それを f_1 とすると f_1 はⅠ，Ⅱ，Ⅲのみの特異点集合をもち $f_1(L)\cap D^2=\phi$. $U(f(L))-\mathring{U}(D^2)$ を V_0 とおく，K が V_0 で geom. essential なら $V=V_0$ とおく．またもし K が V_0 で inessential なら V_0 の meridian ball D^2 で $K\cap D^2=\phi$ なるものがある。$f_1(L)\cap D^2\neq\phi$ なら上の方法と全く同じにして写像 f_1 を変えて f_2 とし $f_2(L)\cap D^2=\phi$ と出来る。以下同様にして K を含むハンドル体 V と K が V で 0-contractible を表わす 2-complex L と写像 $f_k: L\to V$ が存在し，K は V で geom. essential（V が 3-ball となることもある）．従って K は V で 0-contractible，一方 sp(V) は V で 0-contractible でない．∴ $K\neq sp(V)$ in V ⌟

Proposition 2. M^3 内の 0-contractible な任意の closed 1-complex K に対し，K を含む handlebody V で $sp(V)<K$ となるものがある。

証）Lemma 2 より K が 0-contractible なら K を含むハンドル体 V′ で K が V′ で geom. essential かつ $K\neq sp(V)$ となるものがある。そこでそれらの V′ のうちで種数が最小のものを V とすればよい。⌟

系. 単連結な3次元多様体M^3内の任意のclosed 1-complexはωの高さをもつ。

Lemma 3. Vを種数nのハンドル体とし，KをV内のclosed 1-complexとする。$K_0 < K_1 < \cdots\cdots < K_m = K$ in Vという列があると次の性質をもつVのmeridian ball system $\{D_1^2, \cdots, D_n^2\}$がある。即ち$\bigcup_{i=1}^{k} D_i^2 \cap K_0 = \phi$ $(k \leqq n)$かつ$V_0 \equiv V - \bigcup_{i=1}^{k} U(D_i^2)$で$K_0$がgeom. essential そして(a) $g(V_0) \geqq g(U(K_0))$ または(b) $K_0 = sp(V_0)$. (ただしK_0がVでgeom. essentialのときは$k=0$でV_0は全てVと理解する).

証). $K_0 = sp(V_0)$なら結論の(b)の場合が起る。そこで$K_0 \neq sp(V_0)$とする。K_0がV_0でgeom. essentialは条件より従う。そこで$sp(V_0)$は$sp(V_0) < K_0$の条件の①，②をみたす。従って条件③及びLemma 1のCor. 1より$g(V_0) \geqq g(U(K_0))$. 即ち(a)が起る。

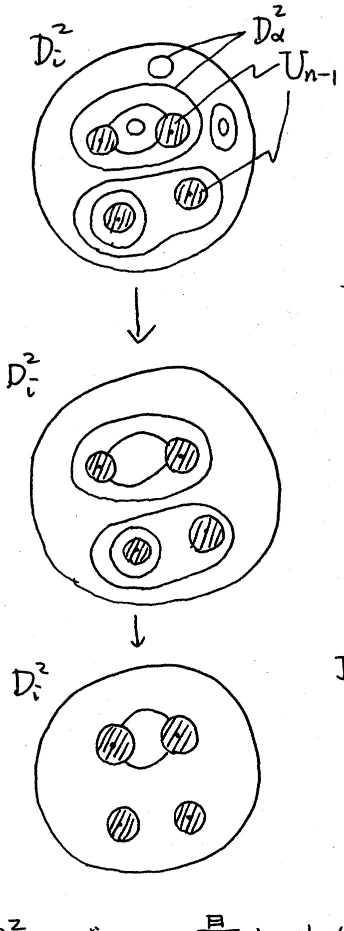
系. Vをhandlebodyとし，KをVに含まれているclosed 1-complexとする。$K_0 < K_1 < \cdots < K_m = K$ in Vという列があると$g(V) \geqq g(U(K_0)) \geqq \cdots\cdots \geqq g(U(K_{m-1}))$が成り立つ。

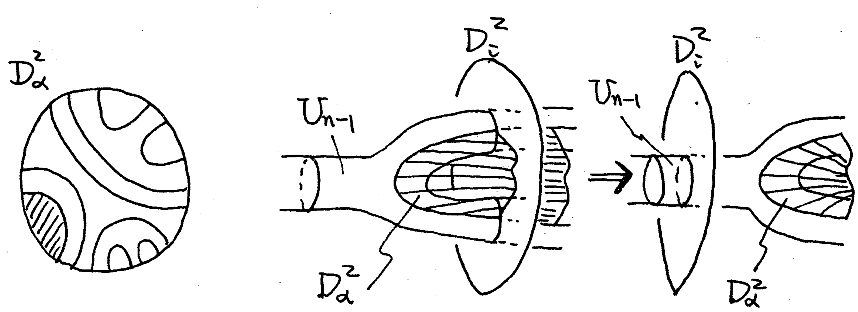
Theorem 1. Vを種数2以下のハンドル体とし，KをVに含まれるclosed 1-complexとする。$K_0 < K_1 < \cdots < K_n = K$という列が存在したとすると (a) $i_{k*} : \pi_1(\partial U(K_k)) \longrightarrow \pi_1(V - U(K_{n-1}))$が

$0 \leqq k \leqq n-1$ なる k に対し単射であるか，または(b)ある k に対し $U(K_k) \subset B^3 \subset V$ となる 3-ball B^3 がある。$(0 \leqq k \leqq n)$.

証) $k = n-1$ のとき（即ち $i_{n-1*}: \pi_1(\partial U_{n-1}) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{U}_{n-1})$ のとき（ただし $U_{n-1} = U(K_{n-1})$）．もし $\mathrm{Ker}\, i_{n-1*} \neq (e)$ なら Loop Th. より，次の条件をみたす単純閉曲線 α が ∂U_{n-1} 上に存在する。$\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-1} かつ α は $V - \mathring{U}(K_{n-1})$ で特異点のない 2-ball D^2_α を張る。先ず $\alpha \sim 0$ on ∂U_{n-1} (null-homologous) で U_{n-1} で特異点のない 2-ball $\tilde{D}^2_\alpha$ を張るとき．$\Sigma^2 \equiv D^2_\alpha \cup_\partial \tilde{D}^2_\alpha$ とおくと $\Sigma^2 \cong S^2$ で $\Sigma^2 \subset V$． V はハンドル体だから Σ^2 は V で 3-ball B^3_α を張る $W \equiv U_{n-1} \cup B^3$ はハンドル体で $\alpha \neq 0$ on ∂U_{n-1} だから $g(W) < g(U_{n-1})$．そして $K_n \cup K_{n-1} \subset W$． 従って $g(U_{n-1}) = 1$ なら $g(W) = 0$ i.e. $W \cong B^3$．結論の(b)が起る。$g(V) \leqq 2$ と Lemma 3 の系より $g(U_{n-1}) = 2$ 即ち W は solid torus と思ってよい。もし K_n が W で geom. inessential なら W の meridian ball D^2 で $D^2 \cap K_n = \phi$ となるものがある。$K_n \subset W - \mathring{U}(D^2) \cong B^3$ これは結論の(b)が起る。そこで K_n は W で geom. essential とする。またもし $sp(W) = K_n$ in W なら W は K_n のある正則近傍 $\tilde{U}(K_n)$ となる。よって $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset \tilde{U}(K_n) = W$ となり $K_{n-1} < K_n$ と Lemma 1 に矛盾．従って $sp(W) \neq K_n$ in W． 故に $g(W) < g(U_{n-1})$ より $K_{n-1} < K_n$ となる事に矛盾．次に $\alpha \nsim 0$ on ∂U_{n-1} で α が U_{n-1} で特異点のない 2-ball $\tilde{D}^2_\alpha$ を張るとき，$\Sigma^2 = D^2_\alpha \cup_\alpha \tilde{D}^2_\alpha$ とおくと $\Sigma^2 \cong S^2$ そして $\alpha \nsim 0$ on

∂U_{n-1}だからU_{n-1}に含まれる単純閉曲線βでU_{n-1}で null-homologous でなく，$\beta\cap\hat{D}^2_\alpha=1$点となるものがある．従って$\beta\cap\Sigma^2=1$点 これは$\pi_2(V)=0$となって矛盾．従ってこの場合も起らない。従って$\alpha$は$U_{n-1}$で特異点のない 2-ball を張る事はない。次に $\{D^2_1, D^2_2\}$をVの meridian ball system とする（$g(V)=1$のときは$\{D^2_1\}$）．K_{n-1}と$\bigcup_{i=1}^{2} D^2_i$とを transverse に交わるようにし且つ $K^{(0)}\cap\bigcup_{i=1}^{2} D^2_i=\phi$ となるようにする事により $\bigcup_{i=1}^{2} D^2_i\cap U_{n-1}$は$U_{n-1}$の meridian balls，また$\bigcup_{i=1}^{2} D^2_i\cap D^2_\alpha=\{$simple arcs$\}\cup\{$simple closed curves$\}$．このうちで内部に$U_{n-1}$との交わりを含まない simple closed curves を cut & glue で取り除く．次に（D^2_i上でみて）U_{n-1}との交わりを含む simple closed curve のうちで最も内側から考えてこのような simple closed curves は存在しない事がわかる。従って$D^2_\alpha\cap\bigcup_{i=1}^{2} D^2_i=\{$simple arcs$\}$となる。





D^2_α上でみて最も外側のものから，それが張っている 2-ball を利用してD^2_iを isotopy で動かして$D^2_i\cap D^2_\alpha$を取り除く．た

だし取り除いた結果 $D_i^2 \cap U_{n-1}$ が 2-balls でそれらの境界である circles が全て ∂U_{n-1} 上で null-homotopic でないようにしておく．以上より $\bigcup_{i=1}^{2} D_i^2 \cap U_{n-1}$ は 2-balls でその境界である circles は ∂U_{n-1} で null-homotopic でなく，$\bigcup_{i=1}^{2} D_i^2 \cap D_\alpha^2 = \phi$ そこで U_{n-1} が D_1^2, D_2^2 で cut された後の $\alpha = \partial D_\alpha^2$ を含む成分を U_α とすると U_α は 3-ball $V_0 \equiv V - \mathring{U}(D_1^2 \cup D_2^2)$ に埋め込まれた solid torus。$D_\alpha^2 \subset V_0 - \mathring{U}_0$，ここで $U_0 = U_{n-1} - \mathring{U}(D_1^2 \cup D_2^2)$. $\partial(U_\alpha \cup U(D_\alpha^2)) \cong S^2$

$\therefore U_\alpha \cup U(D_\alpha^2) \cong B^3$. $\therefore W \equiv U_{n-1} \cup U(D_\alpha^2)$ は種数 1 のハンドル体.（$\alpha \not\sim 0$ on ∂U_α. $\because$ もし $\alpha \sim 0$ on ∂U_α なら U_α は solid torus だから α は U_α で 2-ball $\tilde{D}_\alpha^2$ を張る事になり，従って α は U_{n-1} で 2-ball を張る事になり，これは最初の段階で示した事に矛盾）. $K_{n-1} \subset W$. また K_n は W で geom. essential としてよい。何故ならもし K_n が W で inessential なら W の meridian 2-ball D^2 で $K_n \subset W - D^2$ となるものがあり $W - D^2 \cong B^3$ より (b) が起るから．またもし $K_n = sp(W)$ なら $K_n \subset U(K_{n-1}) \subset W = \tilde{U}(K_n)$ となり $K_{n-1} < K_n$ と Lemma 1 に矛盾．$\therefore K_n \neq sp(W)$. そして $g(W) < g(U_{n-1})$. これは K_{n-1} が $K_{n-1} < K_n$ の条件③を満足していない事に矛盾.

$\therefore \ker i_{n-1*} = (e)$

次に $\pi_1(\partial U_{n-2}) \xrightarrow{i_{n-2*}} \pi_1(V - \mathring{U}_{n-1})$ を考える。上と全く同様にして $\pi_1(\partial U_{n-2}) \xrightarrow{j_{n-2*}} \pi_1(V - \mathring{U}_{n-2})$ は単射であるか U_{n-2} を含む 3-ball B^3 が存在する。後者の場合は (b) が起る事になる。そこ

で j_{n-2*} が単射であると仮定する。$k_{n-2*}: \pi_1(\partial U_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(U_{n-2} - \mathring{U}_{n-1})$ が単射である事を示す。もし $\mathrm{Ker}\, k_{n-2*} \neq (e)$ なら loop Th. より ∂U_{n-2} 上に次の性質をもつ単純閉曲線 α が存在する。即ち $\alpha \not\simeq 0$ on ∂U_{n-2} 且つ α は $U_{n-2} - \mathring{U}_{n-1}$ で特異点をもたない 2-ball D^2_α を張る。もし $\alpha \not\sim 0$ on ∂U_{n-2} なら K_{n-1} は U_{n-2} で geom. inessential となり $K_{n-2} < K_{n-1}$ の条件②に反する。また $\alpha \sim 0$ on ∂U_{n-2} なら D^2_α で U_{n-2} を cut すると U_{n-2} は 2 つのハンドル体 W_1, W_2 に分かれ $g(W_i) = 1$ かつ $K_{n-1} \subset W_1$ または $K_{n-1} \subset W_2$ ($g(V) = 1$ のときは $\alpha \sim 0$ on $\partial U(K_{n-2}) \Leftrightarrow \alpha \simeq 0$ on $\partial U(K_{n-2})$ だからこの場合は起らない). これは $g(U_{n-2})$ の最小性に矛盾. (またはこの場合も K_{n-1} は U_{n-2} で geom. inessential となり矛盾). 故に k_{n-2*} = 単射である。従って次の diagram と van Kampen の定理より $i_{n-2*}: \pi_1(\partial U_{n-2}) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{U}_{n-1})$ は単射となる。

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi_1(\partial U_{n-2}) \arrow[dl, "j_{n-2*}"'] \arrow[dr, "k_{n-2*}"] \arrow[dd, dashed, "i_{n-2*}"] & \\
\pi_1(V - \mathring{U}_{n-2}) \arrow[dr] & & \pi_1(U_{n-2} - \mathring{U}_{n-1}) \arrow[dl] \\
 & \pi_1(V - \mathring{U}_{n-1}) &
\end{tikzcd}
$$

以下同様.

<u>系</u> V を種数 2 以下のハンドル体とする。K が V に含まれる closed 1-complex で ω の高さをもつなら K は V 内の 3-ball に含まれる。

証). K は ω の高さをもつので $\tilde{K} < K$ となる任意の $\tilde{K}$ が ∞ の高さをもつ。今 $\tilde{K}$ を1つ固定すると $V - \mathring{U}(\tilde{K})$ は irreducible だから Haken number $h(V - \mathring{U}(\tilde{K})) < \infty$ がきまる。即ち $V - \mathring{U}(\tilde{K})$ に含まれる disjoint, non-parallel incompressible surfaces の最大個数が $h(V - \mathring{U}(\tilde{K}))$ (これは有限[H. Th.13.2])。K は ω の高さをもつから $h(V - \mathring{U}(\tilde{K}))$ より大きな自然数 m に対し K は $K_0 < K_1 < \cdots < K_m = \tilde{K} < K_{m+1} = K$ なる列をもつ。定理1より

$\pi_1(\partial U_k) \longrightarrow \pi_1(V - \mathring{U}(\tilde{K}))$ $(0 \leq k \leq m)$ が単射となるか, U_k が3-ball に含まれる。もし前者が起ると Lemma 1 の Cor. 2 から $\partial U(K_k) \not\approx \partial U(K_j)$ だから Haken number の定義に矛盾. 故に U_k が 3-ball B^3 に含まれる。$^\exists U(K_0) \supset {}^\exists U(K_1) \supset \cdots \supset U(K_m)$ だから $U_k \subset B^3$ なら $K = K_m \subset B^3$ ┘

参考文献

[H] J. Hempel : 3-manifolds , Ann. Math. Study 86.

[S] N. Smythe : Handlebodies in 3-manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) 534-538.